MAT102 ANALİZ 2 YAZ DÖNEMİ ARASINAV SORULARI

1- Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$ **(b)** $\begin{Bmatrix} x=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) \\ y=1/\sqrt{1+t^2} \end{Bmatrix}$

(c) $\arctan\left(x^2+y^2\right)-\ln(xy)-1=0\,(xy>0)$.

2- $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\left(3-x^2\right)/2, & 0\le x\le 1 \\ 1/x \ , & 1<x<2\end{cases}$ fonksiyonu Lagrange teoremine uygulanabilir mi?

Cevabınız evet ise ilgili c sayısını bulunuz.

3- L'Hospital' den yararlanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(\cot x)\right)^{\tan x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

4- $y^2=2ax$ parabolü üzerinde hangi noktada çizilen teğet $y=-2x+3$ doğrusuna paralel olur?

5- Bir dikdörtgenin tabanı $x-$ekseni üzerinde üst iki köşesi $y=12-x^2$ parabolü üzerindedir.

Dikdörtgenin olabilecek en büyük alanı ve boyutları ne olmalıdır?

6- $f(x)=\ln\left(-x^2+5x-4\right)$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çiziniz.

7- Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int\frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}dx$ **(b)** $\int\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx$

Not: Her soru eşit puanlıdır. Süre 100 dakikadır... **12-07-2018**

Başarılar... **Prof.Dr. Birsen S. Duyar**

MAT102

ANALİZ II YAZ DÖNEMİ ARASINAV SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1) Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{\sin x}{x}\cdot \ln(\arcsin x)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2}\cdot \ln(\arcsin x) + \frac{\sin x}{x}\cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}\cdot\left[\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\cdot \ln(\arcsin x) + \frac{\sin x}{x\cdot \arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

(b) $\begin{pmatrix} x = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}}{\dfrac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}}}$$

(c) $\arctan(x^2+y^2) - \ln(x.y) - 1 = 0 \quad (x.y>0)$

$$\frac{2x+2yy'}{1+(x^2+y^2)^2} - \frac{y+x.y'}{xy} = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x^2y - y - y(x^2+y^2)^2}{x+x(x^2+y^2)^2-2xy^2}$$

2) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{x}, & 1<x\le 2\end{cases}$ fonksiyonu Lagrange Teoremine uygulanabilir mi? Cevabınız evet ise ilgili c sayısını bulunuz.

Çözüm: $f'(1^-) = \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{3-(1+h)^2}{2}-1}{h} = -1$

$f'(1^+) = \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = -1 \Rightarrow f'(1^+)=f'(1^-)=f'(1)=-1$

Lagrange uygulanır.

$f'(x)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{x^2}, & 1<x\le 2\end{cases}$ $\quad f(2)=\frac{1}{2}$, $f(0)=\frac{3}{2}$

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c)$ o.ş. $c\in(0,2)$ var. $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c) \Leftrightarrow -1 = 2.f'(c)$

$-1 = \begin{cases}-2c, & 0<c\le 1\\ -2/c^2, & 1<c<2\end{cases}$ $\quad c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\sqrt{2}$ olur.

③ L'Hospital kuralından yararlanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(\cot x))^{\tan x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

a) $y = (\ln(\cot x))^{\tan x} \overset{\infty^0}{\Longrightarrow} \ln y = \tan x \cdot \ln(\ln(\cot x)) = \dfrac{\ln(\ln(\cot x))}{\frac{1}{\tan x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln(\cot x))}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln(\cot x)}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cot x}\right)}{-1/\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cot x\cdot(\ln(\cot x))} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t\ln t} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} t=\cot x \\ x\to 0^+ \Leftrightarrow \\ t\to\infty \end{array}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln\cot x)^{\tan x} = e^0 = 1$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\cdot\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} =$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

④ $y^2 = 2ax$ parabolü üzerinde hangi noktada çizilen teğet $y=-2x+3$ doğrusuna paralel olur?

Çözüm: $y^2 = 2ax \Rightarrow 2yy' = 2a \Rightarrow yy' = a \Rightarrow \boxed{y' = \frac{a}{y}}$

$y=-2x+3 \Rightarrow m=-2,\quad m_T = f'(x_0,y_0) \Leftrightarrow -2 = y'\big|_{(x_0,y_0)} \Leftrightarrow$

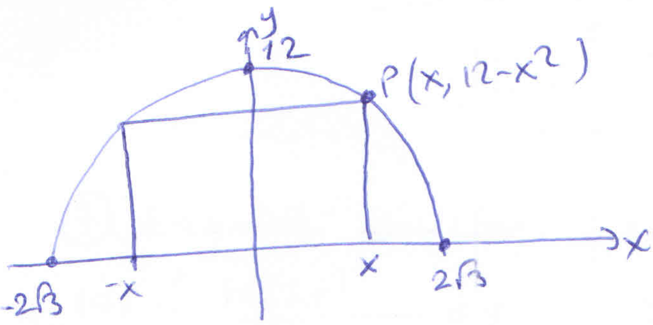
$-2 = \dfrac{a}{y_0} \Rightarrow y_0 = -\dfrac{a}{2}$, $\quad x_0 = \dfrac{y_0^2}{2a} = \dfrac{(-\frac{a}{2})^2}{2a} \Rightarrow x_0 = \dfrac{a}{8}$

$(x_0,y_0) = \left(\frac{a}{8}, -\frac{a}{2}\right)$, $\quad m_T = -2$ $\quad \left(\frac{a}{8}, -\frac{a}{2}\right)$ noktasından

$y - y_0 = m_T(x - x_0)$. çizilen teğet $y=-2x+3$ doğrusuna paralel olur.

(5) Bir dikdörtgenin tabanı x-ekseni üzerinde üst iki köşesi $y=12-x^2$ parabolü üzerindedir. Dikdörtgenin olabilecek en büyük alanı ve boyutları ne olmalıdır.

<u>Çözüm:</u> $12-x^2=0 \Rightarrow 12=x^2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{12}=\mp 2\sqrt{3}$



Dikdörtgenin alanı $A(x)$

$A(x)=2x\cdot(12-x^2)$, $0<x<2\sqrt{3}$

$A'(x)=24-6x^2$,

$A'(x)=0 \Rightarrow x=\mp 2$

	-2	0	2	$2\sqrt{3}$
A'	0	$+$	0	$-$
A		$\nearrow$	maks	$\searrow$

$A(2)=2\cdot2\,(12-2^2)=32$ en büyük alan

$a=2\cdot2=4$, $b=12-2^2=8$ boyutlar.

— o —

(6) $f(x)=\ln(-x^2+5x-4)$ değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.

- Tanım kümesi $=\{x\in\mathbb{R} : -x^2+5x-4>0\}=(1,4)$

		1		4	
$-x^2+5x-4$	$-$	0	$+$	0	$-$

- $y=0 \Rightarrow 0=\ln(-x^2+5x-4) \Rightarrow -x^2+5x-4=1$
  $x^2-5x+5=0$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{5\mp\sqrt{5}}{2}\in(1,4)$

- Asimptotlar; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln(-x^2+5x-4)=-\infty$

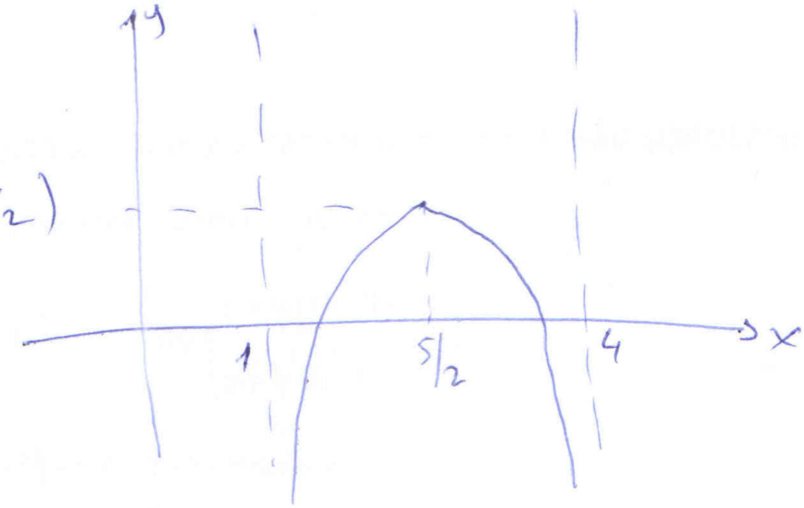
  $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\ln(-x^2+5x-4)=-\infty$, $\quad$ $x=1$, $x=4$ düşey asimptot

  yatay yok.

- Türev $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{-x^2+5x-4}=0 \Rightarrow x=5/2$

x	$-\infty$	1		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		$5/2$		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		4	$+\infty$
f'			$+$		$+$	0	$-$		$-$		
f		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	
		d.a								d.a.	

grafiği :



(7) Aşağıdaki ~~limitleri~~ integralleri bulunuz.

(a) $\int \frac{\ln(2x)}{x \cdot \ln(4x)} dx$ b) $\int \sqrt{x} \cos\sqrt{x} \, dx$

(a) $\ln 4x = \ln 2 \cdot 2x = \ln 2 + \ln 2x \Rightarrow$) $\ln 2 + \ln 2x = u \Rightarrow du = \frac{2}{2x} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx = \int \frac{\ln 2x}{x(\ln 2 + \ln 2x)} dx = \int \frac{u - \ln 2}{u} du = \int du - \ln 2 \int \frac{du}{u}$$

$$= u - \ln 2 \cdot \ln u = \ln 2 + \ln 2x - \ln 2 \cdot \ln|\ln 2 + \ln 2x| + c$$

$$= \ln 4x - \ln 2 \cdot \ln|\ln 4x| + c$$

(b) $t^2 = x \Rightarrow 2t\,dt = dx$

$$\int \sqrt{x} \cos\sqrt{x} \, dx = \int t \cdot \cos t \, 2t\,dt = 2\int t^2 \cdot \cos t \, dt =$$

$(u = t^2 \Rightarrow du = 2t\,dt, \; dv = \cos t \, dt \Rightarrow v = \sin t)$

$$= 2 \cdot \left[t^2 \sin t - 2 \cdot \int t \cdot \sin t \, dt \right]$$ $\left(\begin{array}{l} u_1 = t, \; du_1 = dt \\ dv_1 = \sin t \, dt, \; v_1 = -\cos t \end{array} \right)$

$$= 2t^2 \sin t - 4 \cdot \left(-t\cos t + \int \cos t \, dt \right)$$

$$= 2t^2 \sin t + 4t \cos t - 4 \sin t + c$$

$$= 2x \sin\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cos\sqrt{x} - 4 \sin\sqrt{x} + c$$